第４講　数　列

1　数列 $\{a_n\}$ は，初項が 1 で

$$a_{n+1}=a_n+4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$ は，初項が 1 で

$$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。さらに，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

(1)　$a_2=$ [ア] である。また，階差数列を考えることにより

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\,n^2-\boxed{\text{ウ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であることがわかる。さらに

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}\,n^3+\boxed{\text{オ}}\,n^2-\boxed{\text{カ}}\,n}{\boxed{\text{キ}}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を得る。

(2)　$b_2=$ [ク] である。また，すべての自然数 n に対して

$$a_n-b_n=\boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つ。

[ケ] の解答群

⓪　0	①　$2n$	②　$2n-2$
③　n^2-1	④　n^2-n	⑤　$1+(-1)^n$
⑥　$1-(-1)^n$	⑦　$-1+(-1)^n$	⑧　$-1-(-1)^n$

（次ページに続く。）

(3)　(2)から

$$a_{2021}\ \boxed{\text{コ}}\ b_{2021},\quad a_{2022}\ \boxed{\text{サ}}\ b_{2022}$$

が成り立つことがわかる。また，$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくと

$$S_{2021}\ \boxed{\text{シ}}\ T_{2021},\quad S_{2022}\ \boxed{\text{ス}}\ T_{2022}$$

が成り立つこともわかる。

コ ～ ス の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$<$	①　$=$	②　$>$

（次ページに続く。）

(4)　数列 $\{b_n\}$ の初項を変えたらどうなるかを考えてみよう。つまり，初項が c で

$$c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{c_n\}$ を考える。

すべての自然数 n に対して

$$b_n-c_n=\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}$$

が成り立つ。

また，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ とおく。$S_4=U_4$ が成り立つとき，$c=\boxed{\text{タ}}$ である。このとき

$$S_{2021}\ \boxed{\text{チ}}\ U_{2021},\quad S_{2022}\ \boxed{\text{ツ}}\ U_{2022}$$

も成り立つ。

ただし，$\boxed{\text{タ}}$ は，文字 (a～d) を用いない形で答えること。

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　＜	①　＝	②　＞

2

〔1〕 自然数 n に対して，$S_n=5^n-1$ とする。さらに，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が S_n であるとする。このとき，$a_1=$ ア である。また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{\,n-1}$$

である。この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

上で求めたことから，すべての自然数 n に対して

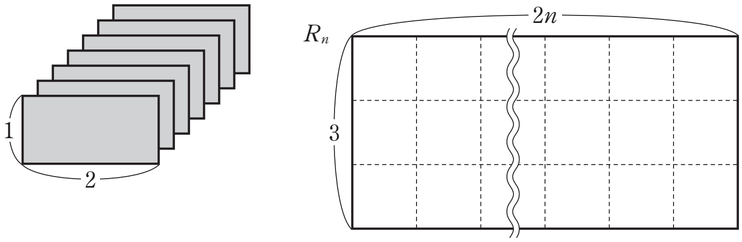
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\left(1-\boxed{\text{キ}}^{\,-n}\right)$$

が成り立つことがわかる。

（次ページに続く。）

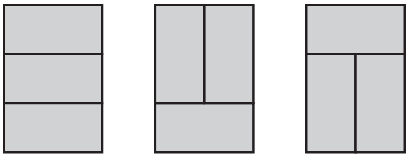
〔２〕 太郎さんは和室の畳を見て，畳の敷き方が何通りあるかに興味を持った。ちょうど手元にタイルがあったので，畳をタイルに置き換えて，数学的に考えることにした。

縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形のタイルが多数ある。それらを縦か横の向きに，隙間も重なりもなく敷き詰めるとき，その敷き詰め方をタイルの「配置」と呼ぶ。

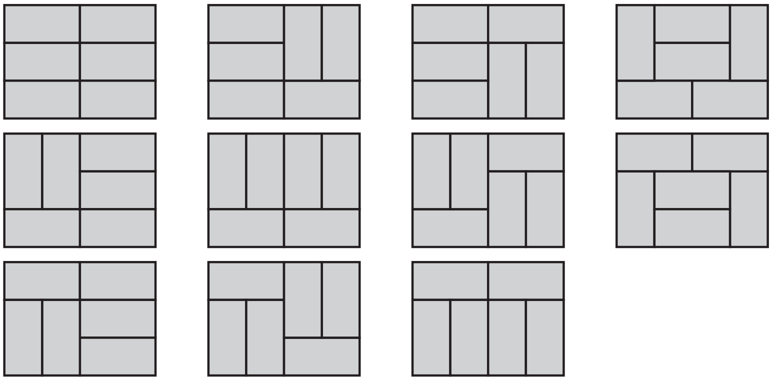


上の図のように，縦の長さが 3，横の長さが $2n$ の長方形を R_n とする。$3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。

$n=1$ のときは，下の図のように $r_1=3$ である。

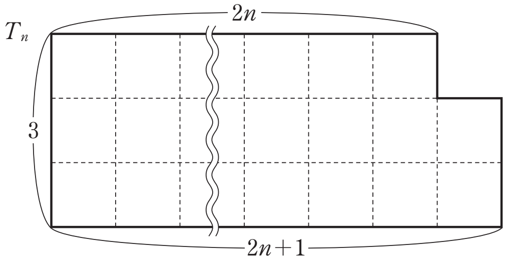


また，$n=2$ のときは，下の図のように $r_2=11$ である。



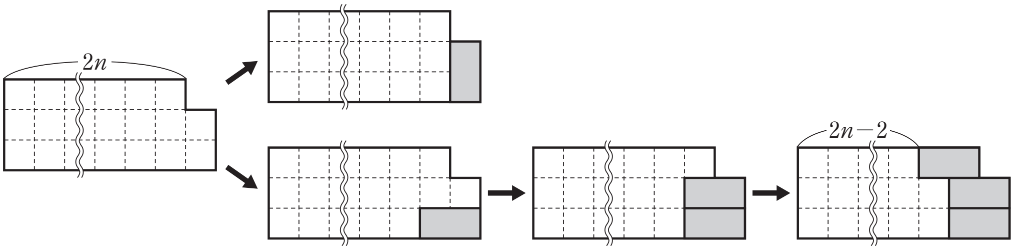
（次ページに続く。）

(1)　太郎さんは次のような図形 T_n 内の配置を考えた。



$(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n=1$ のときは，$t_1=$ **ク** である。

さらに，太郎さんは T_n 内の配置について，右下隅（すみ）のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

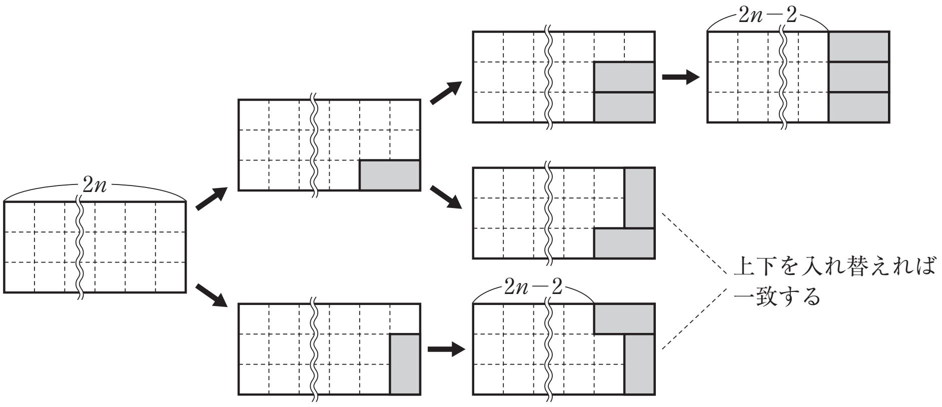
$$t_n=Ar_n+Bt_{n-1}$$

が成り立つことがわかる。ただし，$A=$ **ケ** ，$B=$ **コ** である。

以上から，$t_2=$ **サシ** であることがわかる。

（次ページに続く。）

同様に，R_n の右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して

$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$

が成り立つことがわかる。ただし，$C=$ **ス** ，$D=$ **セ** である。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **ソタ** である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は **チツテ** である。

第4講　数　列

1　(1)　$a_1=1,\ a_2=a_1+4\cdot1+2=1+6=7$

$a_{n+1}-a_n=4n+2$ より，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=2n^2-1\ (n=1\text{ のときも成立})$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n=\frac{2n^3+3n^2-2n}{3}$$

(2)　$b_1=1,\ b_2=b_1+4\cdot1+2+2\cdot(-1)^1=1+4=5$

$a_{n+1}=a_n+4n+2$　……①　　　$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$　……②

①－②より

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n-2\cdot(-1)^n$

$d_n=a_n-b_n$ とおくと，$d_{n+1}-d_n=-2\cdot(-1)^n$，$d_1=a_1-b_1=0$ より，$n\geqq2$ のとき

$$d_n=d_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-2\cdot(-1)^k\}=0+\frac{2\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}=1+(-1)^n\ (n=1\text{ のときも成立})$$

よって，$a_n-b_n=1+(-1)^n$　(⑤)

(3)　$a_n-b_n=1+(-1)^n$ より

n が奇数のとき $a_n-b_n=0$　つまり $a_n=b_n$

n が偶数のとき $a_n-b_n=2$　つまり $a_n=b_n+2$ であるから $a_n>b_n$

よって，$a_{2021}=b_{2021}$　(①)，　$a_{2022}>b_{2022}$　(②)

また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ に関して，$S_{2021}>T_{2021}$　(②)，　$S_{2022}>T_{2022}$　(②)

(4)　$c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$　……③

②－③より

$b_{n+1}-c_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n-\{c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n\}=b_n-c_n$

よって，$b_n-c_n=b_1-c_1=1-c$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ に関して

$S_4=U_4 \iff S_4-U_4=0 \iff (a_1-c_1)+(a_2-c_2)+(a_3-c_3)+(a_4-c_4)=0$

ここで　$a_n-c_n=(a_n-b_n)+(b_n-c_n)=\{1+(-1)^n\}+(1-c)=2+(-1)^n-c$ より

$S_4=U_4 \iff (2-c)\cdot4+(-1)+1+(-1)+1=0$　　よって　$c=2$

このとき $a_n-c_n=(-1)^n=-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$

よって，$S_{2021}-U_{2021}=\sum_{k=1}^{2021}a_k-\sum_{k=1}^{2021}c_k=\sum_{k=1}^{2021}(a_k-c_k)=-1<0$ より $S_{2021}<U_{2021}$　(⓪)

$S_{2022}-U_{2022}=\sum_{k=1}^{2022}a_k-\sum_{k=1}^{2022}c_k=\sum_{k=1}^{2022}(a_k-c_k)=0$ より $S_{2022}=U_{2022}$　(①)

2 〔１〕 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=5^n-1$ で表されるとき

$$a_1=S_1=5^1-1=4$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5\cdot 5^{n-1}-1\cdot 5^{n-1}=(5-1)\cdot 5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot 5^0=4$ となり a_1 と一致する。

したがって，$a_n=4\cdot 5^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

このとき，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{4\cdot 5^{n-1}}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}(1-5^{-n})$$

〔２〕 R_n および r_n について

$n=1$ のとき

図形 R_1 は縦の長さが 3，横の長さが 2 の長方形であり，3 枚のタイルを用いた図形 R_1 内の配置の総数は $r_1=3$ である。

$n=2$ のとき

図形 R_2 は縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形であり，6 枚のタイルを用いた図形 R_2 内の配置の総数は $r_2=11$ である。

(1) T_n および t_n について

$n=1$ のとき

図形 T_1 は図 1 である。4 枚のタイルを用いた図形 T_1 内の配置の総数 t_1 について考える。

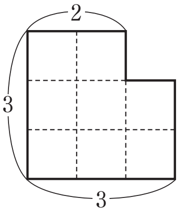
図 1


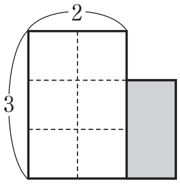
図 2


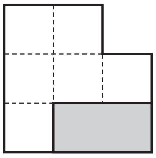
図 3


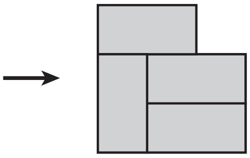
図 4


図 2 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_1 の残りの部分は図形 R_1 であり，残り 3 枚のタイルを用いた配置の総数は r_1 すなわち 3 通りである。

図 3 のように 1 枚のタイルを敷き詰めたとすると，残りの 3 枚のタイルを用いた配置は図 4 の 1 通りである。

よって，$t_1=3+1=4$

図形 T_n について

図5

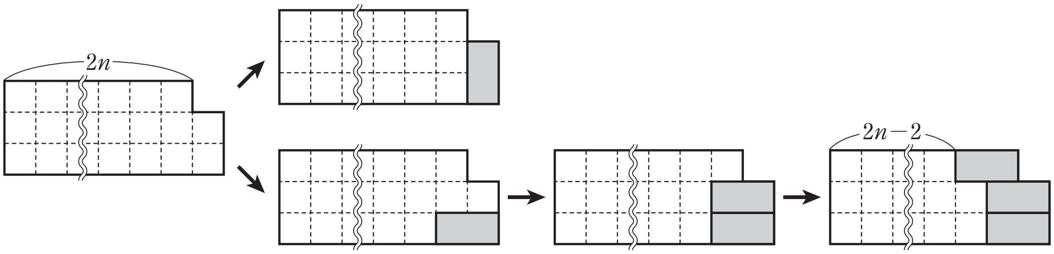


図6　図7　図8

図形 T_n の右下隅のタイルに注目すると，図5または図6の2通りの敷き方があり，この2通りですべてである。

図5のように1枚のタイルを敷き詰めたとすると，図形 T_n の残りの部分は図形 R_n であり，残り $3n$ 枚のタイルを用いた配置の総数は r_n 通りである。

図6・図7・図8のようにタイルを1枚ずつ，計3枚敷いたとすると，図8において図形 T_n の残りの部分は図形 T_{n-1} であり，残り $(3n-2)$ 枚，すなわち $\{3(n-1)+1\}$ 枚のタイルを用いた配置の総数は t_{n-1} 通りである。

よって，2以上の自然数 n に対して，$t_n=1\times r_n+1\times t_{n-1}=r_n+t_{n-1}$ が成り立つ。

以上より，$t_2=r_2+t_1=11+4=15$ であることがわかる。

図形 R_n において，右下隅のタイルに注目する

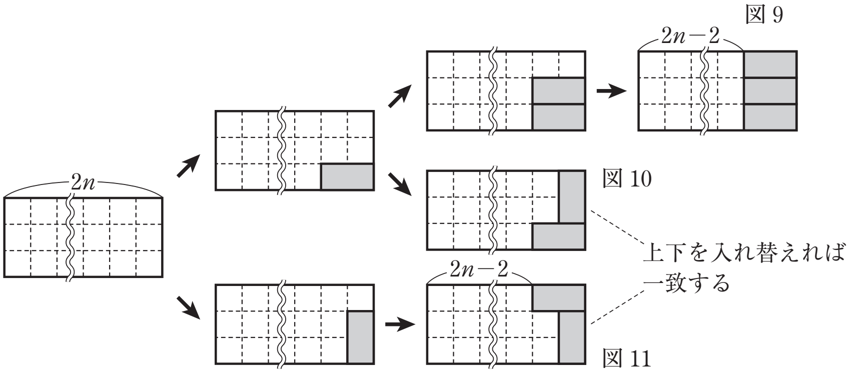


図9〜11のようにタイルを敷いた後の R_n の残りの部分について

図9は図形 R_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は r_{n-1} 通り

図10，図11は図形 T_{n-1} であり，残りのタイルの配置の総数は t_{n-1} 通り

である。よって，2以上の自然数 n に対して，$r_n=r_{n-1}+2t_{n-1}$ が成り立つ。

(2)　畳を縦の長さが1，横の長さが2の長方形とみなすとき，縦の長さが3，横の長さが6の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，図形 R_3 内のタイルの配置の総数であり

$r_3=r_2+2t_2=11+2\cdot 15=41$

である。

また，縦の長さが3，横の長さが8の長方形の部屋における畳の敷き詰め方の総数は，

図形 R_4 内のタイルの配置の総数であり

$$r_4 = r_3 + 2t_3 = r_3 + 2(r_3 + t_2) = 3r_3 + 2t_2 = 3 \cdot 41 + 2 \cdot 15 = 153$$

である。